Если мы знаем старший член симметрического многочлена, то можно легко восстановить все остальные одночлены многочлена

Рассмотрим следующий многочлен

– старший член многочлена, остальные одночлены мы не записали

Тогда степень каждого следующего одночлена = 3 + 2 + 1 = 6

Исходя из этого можно найти другие комбинации степеней одночленов

(3, 3, 0) не подходит, потому что тогда бы одночлен был бы старшим членом многочлена, а у нас это не так

Тогда остается только одночлен со степенью (2, 2, 2), где

*, а* младше , то есть этот набор подходит под все условия, а такой одночлен входит в наш многочлен

Тогда у нас всего 2 комбинации степеней. Тогда многочлен состоит из различных одночленов, которые являются перестановками переменных внутри ранее описанных одночленов

## Проверка кратности переменной

Если корень многочлена кратный – тогда он является корнем и для производной многочлена

Если корень многочлена трижды кратный – тогда он является корнем первой и второй производной многочлена

И так далее

## Нахождение рамок, в которых все вещественные корни многочлена

**Теорема:**

Дан многочлен:

Где z – это переменная, принимающая значения на множестве комплексных чисел (может быть и вещественным)

Тогда для него есть такое число А, что:

И для него все вещественные корни удовлетворяют условию:

То есть все вещественные корни находятся в границах

**Доказательство:**

Достаточно доказать, что если

То z – это не корень многочлена

Так как A > 0, то > 1, значит при всех перемножениях и делениях сверху знак остается тем же

То есть:

Тогда:

То есть

При

То есть z – это не корень многочлена

## Пример задания, которое может быть на экзамене

Тогда по предыдущей теореме

Диапазон найден, теперь найдем число корней

Для этого примерно найдем первый ноль. Подставим в многочлен 0, 1 и 2

То есть один из нулей в промежутке (1;2). При этом функция дальше непрерывно растет, поэтому можно понять, что после x=2 нулей нет.

Теперь рассмотрим значения x в (-9;0)

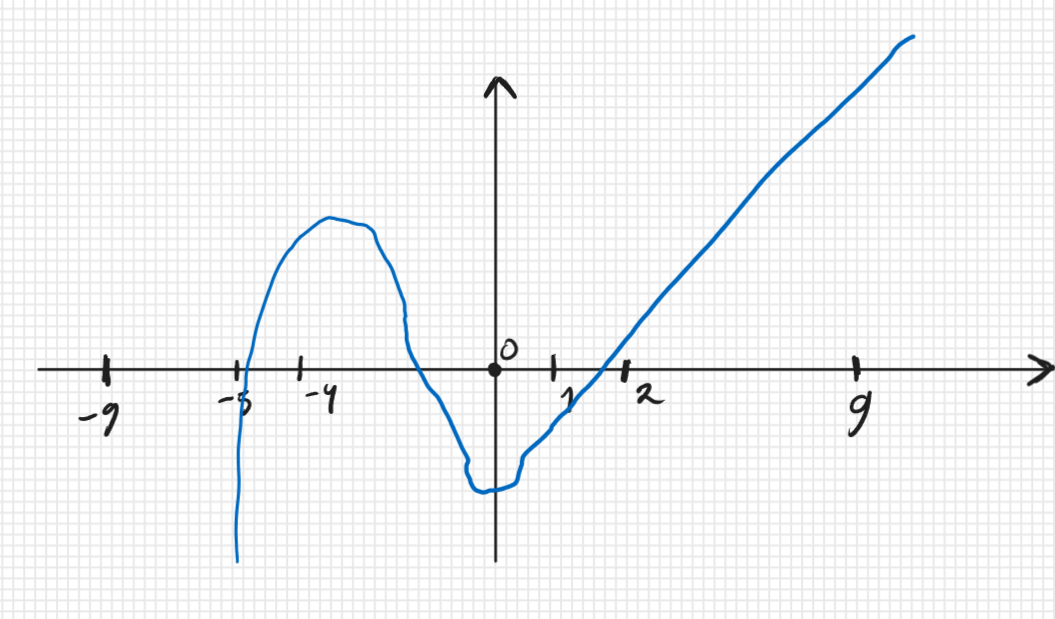
Возьмем x = -2 и -4

Здесь мы видим, что где-то между 0 и -2 многочлен = 0, но, скорее всего, есть еще один корень у многочлена, потому что после он начнет резко уменьшаться

Подставим x = -5

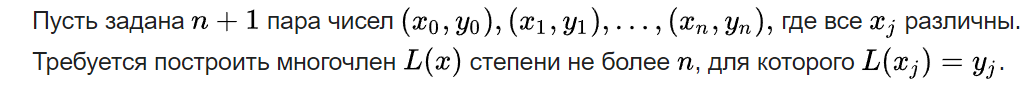
То есть уже на x = -5 многочлен начинает резкое падение из-за , которая становится меньше, чем все остальные. Поэтому в промежутке (-5;-4) многочлен где-то становится = 0. После -5 значение многочлена стремительно уменьшается, поэтому он уже не станет = 0.

Так мы нашли промежуток, на котором существуют вещественные корни многочлена, а также выяснили, что всего этих корней 3 штуки.



## Теорема о единственном многочлене на n точках

Через n точек, если они не коллинеарные, можно провести одну единственную кривую, задаваемую многочленом n-1 степени



**Доказательство:**

У нас есть набор точек:

* …

Для него у нас есть следующий многочлен:

Где если i = 1, то мы начинаем числитель и знаменатель с

То есть пропускаем первый элемент, сразу начинаем со второго корня

Нетрудно заметить, что у нас все одночлены – (n-1)-й степени, а в каждом одночлене мы пропускаем i-й корень, тогда у нас в знаменателе и числителе не будет 0

Тогда, если мы подставим в наш многочлен , мы получим

Во всех остальных слагаемых мы получаем 0, потому что в них в числителе мы вычитаем из выбранного значения переменной , а в первом слагаемом вы пропускаем первый корень.

Так с остальными корнями – если мы подставляем эти корни, мы получаем соответствующие значения многочлена (т.к. остальные слагаемые = 0)

**Докажем единственность такого многочлена**

Допустим, у нас есть другой

При этом g(x) тоже имеет степень n-1

Тогда есть многочлен

, у которого n корней , хотя по теореме Безу у многочлена степени n-1 всего n-1 комплексный корень (противоречие)